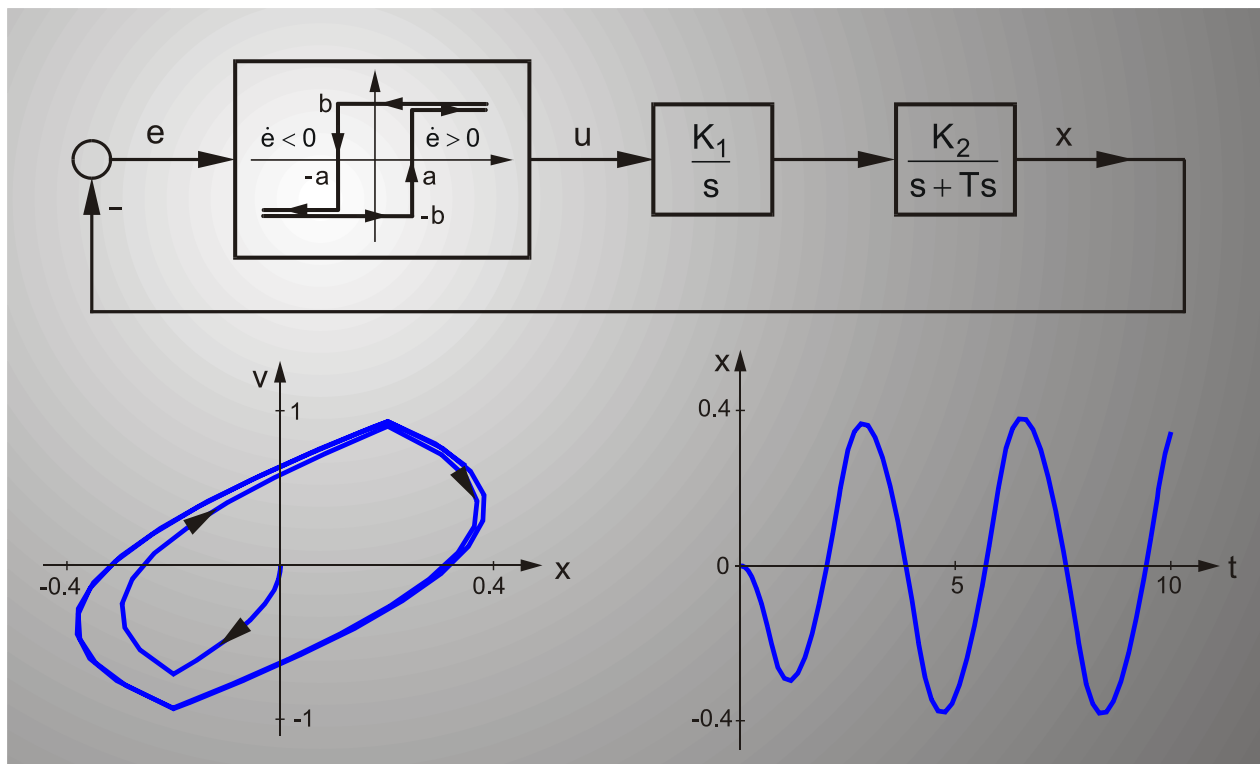


Übungsskript zur Vorlesung

Nichtlineare Regelungssysteme

Dr.-Ing. Mathias Kluwe



[http:// www.irs.kit.edu](http://www.irs.kit.edu)

Einleitung

Mit dem vorliegenden Übungsskript wird dem vielfach geäußerten Wunsch der Studierenden nachgekommen, begleitend zur Vorlesung *Nichtlineare Regelungssysteme* den behandelten Stoff durch das Bearbeiten von Übungsaufgaben vertiefen zu können. Die Zusammenstellung orientiert sich daher am Verlauf der Vorlesung, allerdings wird nicht der komplette Vorlesungsstoff durch die Aufgaben abgedeckt. Außerdem ist ihr Schwierigkeitsgrad aus didaktischen Gründen zum Teil niedriger als der von Prüfungsaufgaben, wodurch zunächst ein leichter Zugang zum Stoff erreicht werden soll. Zur Prüfungsvorbereitung sollten über die Bearbeitung der vorliegenden Aufgaben hinaus auch noch die Prüfungsaufgaben aus den letzten Jahren herangezogen werden.

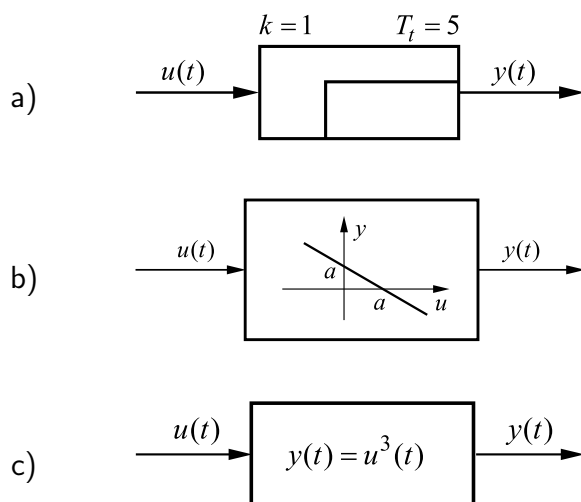
Dieses Übungsskript wird vom jeweiligen Vorlesungsbetreuer überarbeitet, an den Sie sich auch gerne mit Hinweisen oder Anregungen wenden können.

Dr.-Ing. Mathias Kluwe
mathias.kluwe@kit.edu

Aufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sind die folgenden Übertragungsglieder:



Ermitteln Sie, welche der Übertragungsglieder linear und welche nichtlinear sind.

Aufgabe 2:

Ein Totzeitglied und eine statische Kennlinie sind gemäß Abbildung 1 in Reihe geschaltet. Weisen Sie nach, daß es in diesem Fall erlaubt ist, die Reihenfolge der Übertragungsglieder zu vertauschen, ohne daß sich der Zusammenhang zwischen Eingangsgröße $u(t)$ und Ausgangsgröße $y(t)$ verändert.

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

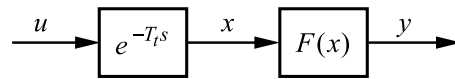


Abbildung 1: Übertragungsglied mit Totzeitglied

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Ruhelagen des folgenden Systems:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a x_1 - b x_1 x_2 \quad , \\ \dot{x}_2 &= d x_2 - c x_1 x_2 \quad .\end{aligned}$$

Dabei soll $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten.

Aufgabe 4:

Das Verhalten des Systems in Abbildung 2 soll in der Phasenebene untersucht werden.

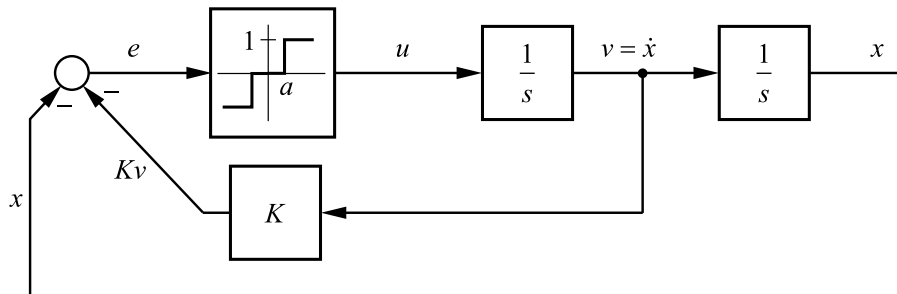


Abbildung 2: Lineares System mit Dreipunktglied

- Bestimmen Sie die Trajektorien des linearen Teilsystems mit $X(s) = \frac{1}{s^2} U(s)$.
- Setzen Sie zunächst $K = 0$ und skizzieren Sie die Trajektorien des geschlossenen Kreises.
- Welchen Einfluß hat eine Rückführung $K > 0$ auf die Schaltlinie?
- Die Trajektorien des geschlossenen Kreises mit Rückführung $K > 0$ sind zu skizzieren.
- Geben Sie die Ruhelage des Regelkreises an. Wie ist das Stabilitätsverhalten?

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

Aufgabe 5:

Untersuchen Sie die Stabilität des in Abbildung 3 dargestellten nichtlinearen Systems mittels der direkten Methode. Als mögliche Lyapunov-Funktion kann dabei die gewichtete Quadratsumme der Zustandsvariablen verwendet werden.

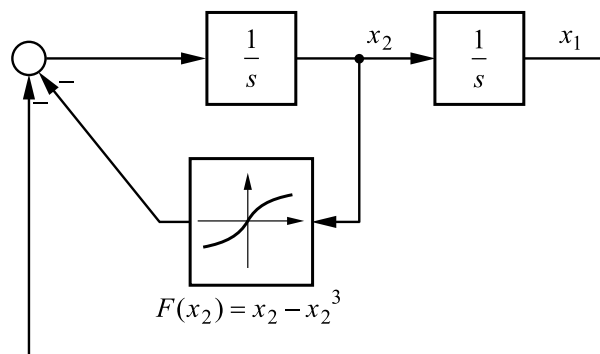


Abbildung 3: Nichtlineares System zur Untersuchung der Stabilität

Aufgabe 6:

Gegeben ist ein nichtlineares System, das durch die folgende Differentialgleichung beschrieben wird

$$\ddot{x} + \dot{x} - \dot{x}^5 + x = 0 \quad .$$

- Stellen Sie die Zustandsdifferentialgleichungen auf, wobei $x_1 = x$ und $x_2 = \dot{x}$ gelten soll.
- Bestimmen Sie die Ruhelage des Systems.
- Zur Stabilitätsuntersuchung wird die Lyapunov-Funktion

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

gewählt. In welchem Bereich ist dann $\dot{V}(\underline{x})$ negativ definit?

Übungskript nichtlineare Regelungssysteme

Aufgabe 7:

Gegeben ist das in Abbildung 4 dargestellte System. Berechnen Sie die Ruhelagen des Systems und bestimmen Sie deren Stabilität mit Hilfe des Verfahrens der ersten Näherung.

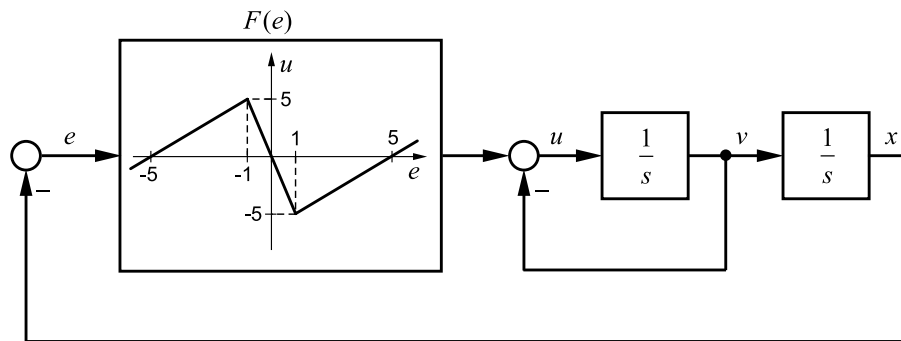


Abbildung 4: System mit nichtlinearer Kennlinie

Aufgabe 8:

Gegeben ist das folgende nichtlineare System mit

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad ,$$

$$y = c(\underline{x}) = x_3 \quad .$$

Dieses System soll mit dem Verfahren der Ein-/Ausganglinearisierung geregelt werden. Dabei sollen alle auftretenden Pole des geregelten Systems auf -2 gelegt werden.

Übungskript nichtlineare Regelungssysteme

Aufgabe 9:

Gegeben ist das folgende nichtlineare System mit

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 - 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad ,$$
$$y = c(\underline{x}) = x_3 \quad .$$

Das System soll mittels der Ein-/Ausganglinearisierung geregelt werden, so daß auftretende Pole auf -2 gelegt werden. Untersuchen Sie gegebenenfalls die Nulldynamik des Systems.

Aufgabe 10:

Gegeben ist der nichtlineare Standard-Regelkreis aus Abbildung 5.

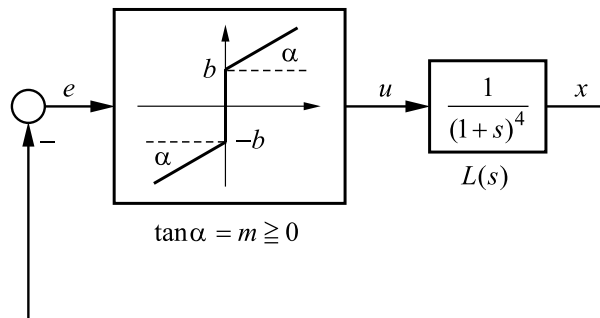


Abbildung 5: Nichtlineares System zur Anwendung der Harmonischen Balance

Bestimmen Sie die Beschreibungsfunktion der Kennlinie, indem Sie diese in zwei bekannte Funktionen zerlegen. Skizzieren Sie mögliche Verläufe von linearer und nichtlinearer Ortskurve. In welchem Wertebereich des Parameters m führt der Regelkreis eine Dauerschwingung aus?

Lösungen

Lösung 1:

Um die Linearität eines Übertragungsgliedes zu überprüfen, wird die Operator-Schreibweise verwendet. Ein Übertragungsglied, daß aus der Eingangsgröße $u(t)$ die Ausgangsgröße $y(t)$ erzeugt, wird damit dargestellt durch $y(t) = \phi\{u(t)\}$. Für ein lineares Übertragungsglied müssen dann die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}\phi\{u + \tilde{u}\} &= \phi\{u\} + \phi\{\tilde{u}\} && \text{Überlagerungsprinzip} \\ \phi\{c u\} &= c \cdot \phi\{u\} && \text{Verstärkungsprinzip}\end{aligned}$$

Beide Bedingungen können zusammengefaßt werden zum Superpositionsprinzip

$$\phi\{c u + \tilde{c} \tilde{u}\} = c \phi\{u\} + \tilde{c} \phi\{\tilde{u}\} \quad .$$

Für die hier gegebenen Systeme erhält man:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}f(c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)) &= f(u_{\text{gesamt}}(t)) = k u_{\text{gesamt}}(t - T_t) \\ &= k (c_1 u_1(t - T_t) + c_2 u_2(t - T_t)) \\ &= k c_1 u_1(t - T_t) + k c_2 u_2(t - T_t) \\ &= f(c_1 u_1(t)) + f(c_2 u_2(t)) \quad .\end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, daß es sich bei dem gegebenen Übertragungsglied um ein lineares System handelt.

b) Für das gegebene Übertragungsglied gilt

$$\begin{aligned}f(c \cdot (u_1 + u_2)) &= a - c \cdot (u_1 + u_2) \neq c \cdot f(u_1) + c \cdot f(u_2) \quad \text{mit} \\ c \cdot f(u_1) + c \cdot f(u_2) &= c \cdot (a - u_1) + c \cdot (a - u_2) = 2 \cdot c \cdot a - c \cdot (u_1 + u_2) \quad .\end{aligned}$$

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

Das betrachtete System ist daher nichtlinear.

c) Als Beispiel betrachtet man

$$f(1 + 2) = 27 \neq f(1) + f(2) = 9 \quad .$$

Damit erkennt man, daß das Verhalten des Übertragungsgliedes nichtlinear ist.

Lösung 2:

Für den in Abbildung 1 dargestellten Fall gilt

$$x(t) = u(t - T_t) \quad \text{und} \quad y(t) = F[x(t)]$$

und damit erhält man

$$y(t) = F[u(t - T_t)] \quad .$$

Nach der Vertauschung der Übertragungsglieder hat man eine neue Zwischengröße $x^*(t)$ für die gilt

$$x^*(t) = F[u(t)]$$

und als neue Ausgangsgröße $y^*(t)$ erhält man

$$y^*(t) = x^*(t - T_t) = F[u(t - T_t)] \quad .$$

Damit ist nachgewiesen, daß in diesem Fall dann $y(t) = y^*(t)$ gilt, also die Vertauschung von nichtlinearer Kennlinie und Totzeitglied vorgenommen werden kann, ohne daß sich der Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ ändert.

Achtung: Diese Vertauschungsregel gilt **nicht**, wenn man das Totzeitglied durch ein beliebiges lineares Übertragungsglied ersetzt!

Lösung 3:

Für die Ruhelagen eines Systems muß allgemein gelten

$$\dot{x}_0 = \underline{0} \quad .$$

Damit folgt für das vorliegende System

$$\dot{x}_0 = \underline{0} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_{10} = 0 \wedge \dot{x}_{20} = 0 \quad .$$

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

Dann erhält man aus den Systemgleichungen

$$\begin{aligned}0 &= a x_{10} - b x_{10} x_{20} \\0 &= d x_{20} - c x_{10} x_{20} \\x_{10} &= \frac{d x_{20}}{c x_{20}} = \frac{d}{c} \quad \text{falls } x_{20} \neq 0 \quad .\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}a \frac{d}{c} - b \frac{d}{c} x_{20} &= 0 \\ \text{und damit } x_{20} &= \frac{a \frac{d}{c}}{b \frac{d}{c}} = \frac{a}{b} \quad .\end{aligned}$$

Sonderfall:

$$x_{20} = 0 \quad .$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}a x_{10} - 0 &= 0 \\ \rightarrow x_{10} &= 0 \quad .\end{aligned}$$

Für das gegebene System erhält man damit die beiden Ruhelagen

$$\begin{aligned}\underline{x}_{01} &= \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \\ \underline{x}_{02} &= \begin{bmatrix} \frac{d}{c} \\ \frac{a}{b} \end{bmatrix} \quad .\end{aligned}$$

Lösung 4:

Für das lineare Teilsystem gilt

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s^2} U(s) \quad , \\ s^2 X(s) &= U(s) \quad , \\ \ddot{x} &= u(t) \quad .\end{aligned}$$

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

Damit folgt für $v = \dot{x}$ die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= u.\end{aligned}$$

Man erhält damit

$$\frac{dv}{dx} = \frac{u}{v}. \quad (1)$$

Hier kann u die Werte $-1, 0, 1$ annehmen. Für $u = 0$ ist $dv/dx = 0$, also $v = \text{const.}$ Für $u = \pm 1$ erhält man aus Gleichung 1

$$v^2 = 2ux + C \quad \text{mit } C \text{ als Integrationsparameter.} \quad (2)$$

Das sind Parabeln, deren Symmetrieachsen auf der x -Achse liegen, der Scheitel ist jeweils durch $(x_S, 0)$ gegeben. Daraus folgt $C = -2ux_S$. Dies liefert in Gleichung 2 eingesetzt

$$v^2 = 2u(x - x_S). \quad (3)$$

Somit ist

$$\begin{aligned}v^2 &= 2(x - x_S) \quad \text{für } u = 1: && \text{Parabeln nach rechts geöffnet,} \\ v^2 &= 2(x_S - x) \quad \text{für } u = -1: && \text{Parabeln nach links geöffnet.}\end{aligned}$$

Für $K = 0$ gilt:

$$u = \begin{cases} -1 & \text{für } e < -a \quad \text{oder } x > a, \\ 1 & \text{für } e > a \quad \text{oder } x < -a, \\ 0 & \text{dazwischen.} \end{cases}$$

Damit erhält man in der $x - v$ -Ebene die beiden Schaltlinien $x = -a$ und $x = a$, die die drei Bereiche mit $u = -1$, $u = 0$, und $u = 1$ trennen. Startet man in einem beliebigen Anfangspunkt (x_0, v_0) , so ergibt sich die in Abbildung 6 skizzierte Trajektorie. Da sie geschlossen ist, führt der Regelkreis eine Dauerschwingung aus.

Ist $K > 0$, so liest man aus Abbildung 2 ab:

$$u = \begin{cases} -1 & \text{für } -x - Kv < -a \quad \text{oder } x + Kv > a, \\ 1 & \text{für } -x - Kv > a \quad \text{oder } x + Kv < -a, \\ 0 & \text{dazwischen.} \end{cases}$$

Für die beiden Schaltgeraden erhält man nun

$$\begin{aligned}g_1: x + Kv &= a && \text{oder } \frac{x}{a} + \frac{v}{a/K} = 1, \\ g_2: x + Kv &= -a && \text{oder } \frac{x}{-a} + \frac{v}{-a/K} = 1.\end{aligned}$$

Die positive Rückführung K bewirkt somit eine Neigung der Schaltgeraden nach links. Ein möglicher Trajektorienverlauf des Systems ist in Abbildung 7 dargestellt.

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

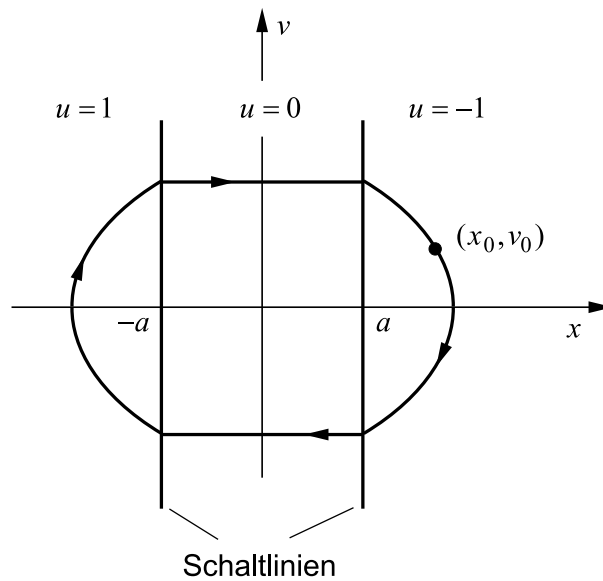


Abbildung 6: Trajektorie für $K = 0$

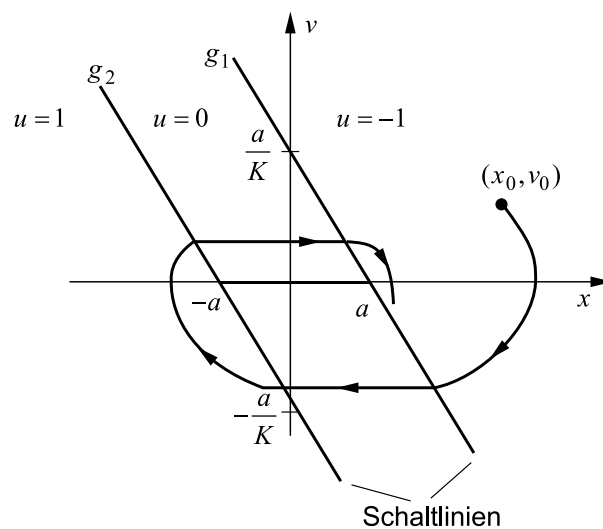


Abbildung 7: Trajektorie für $K > 0$

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

Für die Trajektorien des geschlossenen Kreises folgt daraus, daß sie sich spiralartig zusammenziehen.

Die Ruhelage ist dadurch gegeben, daß die Eingangsgrößen der Integrierglieder Null sind. Nach Abbildung 2 muß also $u = 0$ und $v = 0$ sein. Ersteres ist der Fall für $|e| < a$, also $|a + K v| < a$. Wegen $v = 0$ folgt daraus weiter $|x| < a$. Die Ruhelagen erfüllen somit die Strecke zwischen $-a$ und a auf der x -Achse. Faßt man ihre Gesamtheit als *eine* Ruhelage auf, so ist diese global asymptotisch stabil.

Lösung 5:

Die Zustandsdifferentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \quad , \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_2^3 \quad .\end{aligned}$$

$\underline{x} = \underline{0}$ ist also die einzige Ruhelage des Systems. Als Lyapunov-Funktion wird

$$V = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

gewählt. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2 \lambda_1 x_1 \dot{x}_1 + 2 \lambda_2 x_2 \dot{x}_2 \quad , \\ \dot{V} &= 2 \lambda_1 x_1 x_2 - 2 \lambda_2 x_1 x_2 - 2 \lambda_2 x_2^2 + 2 \lambda_2 x_2^4 \quad .\end{aligned}$$

Wählt man nun $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, so erhält man daraus

$$\dot{V} = -2 x_2^2 (1 - x_2^2) \quad .$$

Dann ist \dot{V} negativ semidefinit im Bereich $|x_2| < 1$.

Lösung 6:

Die Systemgleichung kann umgeschrieben werden als

$$\ddot{x} = -\dot{x} + \dot{x}^5 - x \quad .$$

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

Damit erhält man für den vorgegebenen Ansatz die neuen Systemgleichungen als

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \quad , \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_2^5 - x_1 \quad . \end{aligned}$$

Für die Ruhelage eines Systems muß

$$\underline{\dot{x}}_R = \underline{0}$$

gelten. Hier gilt dann

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{0} = \begin{bmatrix} x_{1R} \\ x_{2R} \end{bmatrix} \\ \dot{x}_1 &= 0 \\ \rightarrow 0 &= x_{2R} \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ 0 &= -x_{2R} + x_{2R}^5 - x_{1R} \\ \rightarrow x_{1R} &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhält man als einzige Ruhelage des gegebenen Systems $\underline{x}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Zur Untersuchung der Stabilität wird die angegebene Lyapunov-Funktion verwendet. Man erhält damit die Funktion

$$\begin{aligned} V(\underline{x}) &= \frac{1}{2} (3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) \\ &= \frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \quad . \end{aligned}$$

Als Ableitung der Lyapunov-Funktion erhält man nun

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 3x_1\dot{x}_1 + x_1\dot{x}_2 + \dot{x}_1x_2 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 3x_1x_2 + x_1(-x_2 + x_2^5 - x_1) + x_2x_2 + 2x_2(-x_2 + x_2^5 - x_1) \\ &= 3x_1x_2 - x_1x_2 + x_1x_2^5 - x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2 + 2x_2^6 - 2x_1x_2 \\ &= -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2^5 + 2x_2^6 \quad . \end{aligned}$$

Damit Stabilität gilt, muß $\dot{V}(\underline{x})$ negativ definit sein, bzw. $-\dot{V}(\underline{x})$ muß positiv definit sein. Es wird eine quadratische Pseudo-Form gebildet und das Kriterium von Sylvester angewendet. Dann erhält man

$$\begin{aligned} -\dot{V}(\underline{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2^5 - 2x_2^6 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x_2^4 \\ -\frac{1}{2}x_2^4 & 1 - 2x_2^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Nun muß bestimmt werden, für welche Werte von \underline{x} die Unterdeterminanten der Matrix $\underline{P} =$

Übungskript nichtlineare Regelungssysteme

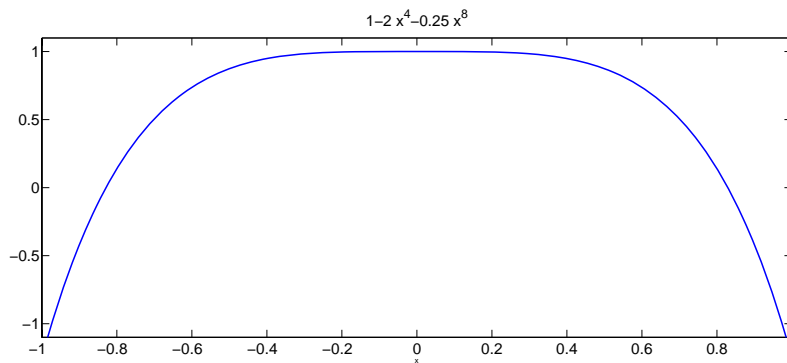


Abbildung 8: Plot der Funktion der Unterdeterminanten D_2

$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x_2^4 \\ -\frac{1}{2}x_2^4 & 1 - 2x_2^4 \end{bmatrix}$ positiv definit sind. Man erhält dabei

$$D_1 = p_{11} = 1 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x_2^4 \\ -\frac{1}{2}x_2^4 & 1 - 2x_2^4 \end{vmatrix} = 1 - x_2^4 - \frac{1}{4}x_2^8 \quad .$$

Damit gilt

$$D_2 = 1 - x_2^4 - \frac{1}{4}x_2^8 > 0 \quad \text{für} \quad |x_2| < \sqrt[4]{2\sqrt{5} - 4} \quad \text{siehe Abbildung 8.}$$

Der Bereich in dem $\dot{V}(\underline{x})$ negativ definit ist, wird beschrieben durch den Bereich mit $|x_2| < \sqrt[4]{2\sqrt{5} - 4} \approx 0,829$.

Lösung 7:

Als Bedingung für das Vorliegen einer Ruhelage müssen sämtliche Integrator-Eingänge den Wert 0 annehmen. Damit muß hier gelten

$$v_R = 0 \quad \text{und} \quad u_R = 0 \quad .$$

Bei der gegebenen nichtlinearen Kennlinie wird der Eingang des ersten Integrators zu 0 für die Werte $e = -x \in \{-5, 0, 5\}$. Der Eingang des zweiten Integrators wird 0, wenn $v_R = 0$ gilt.

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

Damit erhält man die folgenden Ruhelagen für das gegebene System

$$\begin{aligned}\underline{x}_{R1} &= \begin{bmatrix} u_{R1} \\ v_{R1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \\ \underline{x}_{R2} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} , \\ \underline{x}_{R3} &= \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} .\end{aligned}$$

Das gegebene System kann nun dargestellt werden als

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v , \\ \dot{v} &= \ddot{x} = u - v .\end{aligned}$$

oder mit einer Umbenennung der Zustandsgrößen auch

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= F(e) - x_2 = F(-x_1) - x_2 .\end{aligned}$$

Für die Ruhelagen kann nun das Stabilitätsverhalten mittels der Methode der ersten Näherung bestimmt werden. Dazu untersucht man die Eigenwerte der Matrix \underline{A} mit

$$\underline{A} = \left. \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_R} .$$

Hier müssen nun die drei Ruhelagen einzeln untersucht werden:

- $\underline{x}_{1R} = \mathbf{0}$:
Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} &= 0 , & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} &= 1 , \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} &= 5 , & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} &= -1 .\end{aligned}$$

Zur Untersuchung der Stabilität muß nun die Lage der Pole der Matrix \underline{A} ermittelt werden. Man bestimmt dazu

$$\det [s \underline{I} - \underline{A}] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -5 & s+1 \end{bmatrix} = s(s+1) - 5 = s^2 + s - 5 .$$

Nach dem Hurwitz-Kriterium liegt einer der Pole in der rechten Halbebene und nach dem Verfahren der ersten Näherung ist somit auch das betrachtete nichtlineare System

instabil in der Ruhelage $\underline{x}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

- $x_{1R} = -5$ oder $x_{1R} = 5$:

Hier gilt nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} &= 0 \quad , & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} &= 1 \quad , \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} &= -\frac{5}{4} \quad , & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} &= -1 \quad . \end{aligned}$$

Entsprechend muß auch hier die Determinante untersucht werden. In diesem Fall erhält man

$$\det [s \underline{I} - \underline{A}] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{5}{4} & s + 1 \end{bmatrix} = s^2 + s + \frac{5}{4} \quad .$$

In diesem Fall liefert das Hurwitz-Kriterium die Aussage, daß die Pole der Matrix \underline{A} in der linken Halbebene liegen, die betrachteten Ruhelagen des nichtlinearen Systems sind daher stabil.

Lösung 8:

Zunächst werden die benötigten Ableitungen berechnet:

$$L_{\underline{a}} c(\underline{x}) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = x_1 - x_2 \quad ,$$

$$L_{\underline{a}}^2 c(\underline{x}) = [1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = -x_1 - x_2^2 \quad ,$$

$$L_{\underline{a}}^3 c(\underline{x}) = [-1 \quad -2x_2 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = -2x_1 x_2 - 2x_2^3$$

Übungskript nichtlineare Regelungssysteme

Zur Bestimmung der Differenzordnung werden die folgenden Ausdrücke berechnet:

$$L_{\underline{b}}c(\underline{x}) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_{\underline{b}}L_{\underline{a}}c(\underline{x}) = L_{\underline{b}}(x_1 - x_2) = [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_{\underline{b}}L_{\underline{a}}^2c(\underline{x}) = L_{\underline{b}}(-x_1 - x_2^2) = [-1 \ -2x_2 \ 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = -x_2 - 2x_2^2 \neq 0$$

$$\text{für } x_2 \neq 0 \wedge x_2 \neq -\frac{1}{2}$$

Damit erhält man als Differenzordnung des Systems den Wert $\delta = 3$ wenn $x_2 \neq 0$ und $x_2 \neq -\frac{1}{2}$ gilt. Da die Differenzordnung für alle anderen Werte von x_2 mit der Systemordnung übereinstimmt, liegt dann also die volle Differenzordnung vor und es tritt später im geregelten System keine Nulldynamik auf, die gesondert untersucht werden müßte. Da die Systemordnung $n = 3$ ist und volle Differenzordnung vorliegt, können drei Pole vorgegeben werden, die nach Aufgabenstellung auf -2 gelegt werden sollen. Die zur Berechnung des Regler notwendigen q_i berechnen sich aus dem folgenden Ansatz:

$$(s + 2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 \quad .$$

Damit erhält man die q_i als

$$\begin{aligned} q_2 &= 6 \quad , \\ q_1 &= 12 \quad , \\ q_0 &= 8 \quad . \end{aligned}$$

Der gesuchte Regler berechnet sich nun als

$$\begin{aligned} u(\underline{x}) &= -\frac{1}{L_{\underline{b}}L_{\underline{a}}^{\delta-1}c(\underline{x})} \left(L_{\underline{a}}^{\delta}c(\underline{x}) + \sum_{\nu=0}^{\delta-1} q_{\nu}L_{\underline{a}}^{\nu}c(\underline{x}) - q_0 w \right) \\ &= -\frac{1}{-x_2 - 2x_2^2} (-2x_1x_2 - 2x_2^3 + 6(-x_1 - x_2^2) + 12(x_1 - x_2) + 8x_3 - 8w) \\ &= \frac{1}{x_2 + 2x_2^2} (6x_1 - 2x_1x_2 - 12x_2 + 8x_3 - 6x_2^2 - 2x_2^3 - 8w) \quad . \end{aligned}$$

Lösung 9:

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

Zunächst werden die benötigten Ableitungen berechnet. Es gilt

$$L_{\underline{a}}c(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 - 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 \end{bmatrix} = 2x_1x_2 \quad ,$$

$$L_{\underline{a}}^2c(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 - 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 \end{bmatrix} = -4x_1x_2 - 4x_1^2x_3 \quad .$$

Zur Bestimmung der Differenzordnung werden die folgenden Ausdrücke berechnet:

$$L_{\underline{b}}c(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad ,$$

$$L_{\underline{b}}L_{\underline{a}}c(\underline{x}) = L_{\underline{b}}2x_1x_2 = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2x_2 \neq 0 \text{ wenn } x_2 \neq 0 \quad .$$

Damit erhält man für das vorliegende System die Differenzordnung $\delta = 2$ für $x_2 \neq 0$. Das System hat die Ordnung $n = 3$ und hat daher nicht die volle Differenzordnung. Folglich liegt eine Nulldynamik vor, deren Stabilität überprüft werden muß. Dazu wird das System durch eine Koordinatentransformation auf die eingangsnormalisierte Byrnes-Isidori-Normalform gebracht. Es wird eine geeignete Transformation

$$\underline{z} = \underline{\phi}(\underline{x})$$

gesucht. Es gilt dabei

$$z_1 = \phi_1(\underline{x}) = c(\underline{x}) = x_3$$

$$z_2 = \phi_2(\underline{x}) = L_{\underline{a}}c(\underline{x}) = 2x_1x_2$$

$$z_3 = \phi_3(\underline{x}) \quad \text{mit der Bedingung} \quad L_{\underline{b}}\phi_3(\underline{x}) = 0$$

Aus der Bedingung für ϕ_3 erhält man die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} = 0$$

für die eine mögliche Lösung durch

$$\phi_3 = x_2$$

gegeben ist. Damit können nun die Systemdifferentialgleichungen in eingangsnormalisierter

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

Byrnes-Isidori-Normalform dargestellt werden. Man erhält damit

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \quad , \\ \dot{z}_2 &= L_{\underline{a}}^2 c(\underline{x}) + L_{\underline{b}} L_{\underline{a}} c(\underline{x}) u = -4 x_1 x_2 - 4 x_1^2 x_3 + 2 x_2 u \quad , \\ \dot{x}_3 &= L_{\underline{a}} \phi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 - 2 x_1 x_3 \\ 2 x_1 x_2 \end{bmatrix} = -x_2 - 2 x_1 x_3 \quad . \end{aligned}$$

Es gelten nun die folgenden Zusammenhänge zwischen den transformierten und den ursprünglichen Zustandsvariablen:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_3 & x_1 &= \frac{z_2}{2 z_3} \\ z_2 &= 2 x_1 x_2 & x_2 &= z_3 \\ z_3 &= x_2 & x_3 &= z_1 \end{aligned}$$

Die Berechnung der Jakobi-Matrix der Koordinaten-Transformation liefert

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 x_2 & 2 x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Für $x_2 = 0$ ist die Jakobi-Matrix nicht regulär, folglich kann für $x_2 = 0$ die Koordinaten-Transformation nicht umgekehrt werden. Die im folgenden berechnete Ein-/Ausgangslinearisierung kann nur für Zustände mit $x_2 \neq 0$ verwendet werden.

Die Nulldynamik des Systems wird nun beschrieben durch

$$\dot{z}_3 = -z_3 - 2 \frac{z_2}{2 z_3} z_1 \quad .$$

Zur Untersuchung der Nulldynamik wird $z_1 = z_2 = 0$ gesetzt. Dann folgt

$$\dot{z}_3 = -z_3 \quad .$$

Dadurch wird ein System mit Pol bei -1 beschrieben. Folglich ist die Nulldynamik des gegebenen Systems stabil. Bei der Differenzordnung von $\delta = 2$ können zwei Pole auf -2 gelegt werden. Die benötigten q_i erhält man dann aus

$$(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4 \quad .$$

Damit berechnet sich die gesuchte Rückführung

$$\begin{aligned} r(\underline{x}) &= -\frac{1}{2 x_2} (-4 x_1 x_2 - 4 x_1^2 x_3 + 4 \cdot 2 x_1 x_2 + 4 x_3 - 4 w) \\ &\quad - \frac{1}{2 x_2} (4 x_1 x_2 - 4 x_1^2 x_3 + 4 x_3 - 4 w) \quad . \end{aligned}$$

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

Lösung 10:

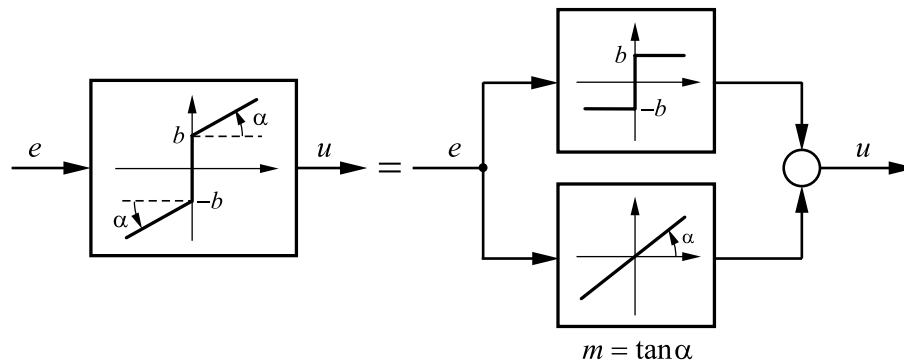


Abbildung 9: Darstellung der Nichtlinearität als Parallelschaltung

Die gegebene Kennlinie lässt sich wie in Abbildung 9 dargestellt durch die Parallelschaltung einer Zweipunktkennlinie und einer linearen Kennlinie darstellen. Da die Beschreibungsfunktion als Frequenzgang eingeführt worden ist, kann man Beschreibungsfunktionen wie Frequenzgänge miteinander verknüpfen. Die Beschreibungsfunktion der Parallelschaltung ist daher die Summe der beiden einzelnen Beschreibungsfunktionen. Damit erhält man hier

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} + m \quad .$$

Die nichtlineare Ortskurve berechnen sich nun als

$$N_I(A) = -\frac{1}{\frac{4b}{\pi A} + m} \quad .$$

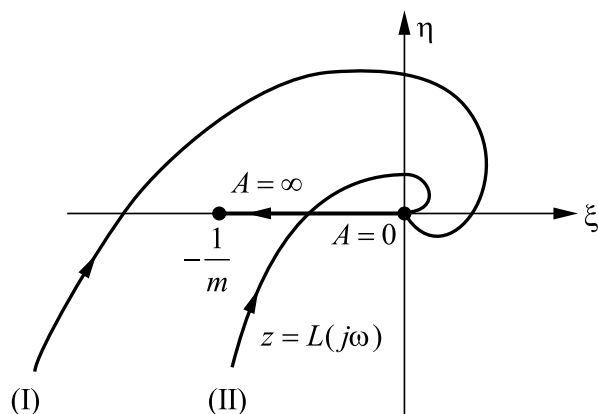


Abbildung 10: Ausschnitt aus der Darstellung der Ortskurven

Der Verlauf von linearer und nichtlinearer Ortskurve ist in Abbildung 10 dargestellt. Es treten dabei zwei Fälle auf:

Übungsskript nichtlineare Regelungssysteme

- Lineare und nichtlineare Ortskurve schneiden sich nicht. Dann tritt keine Dauerschwingung auf.
- Lineare und nichtlineare Ortskurve schneiden sich. In diesem Fall wird die lineare Ortskurve immer von der nichtlinearen Ortskurve von rechts nach links durchstoßen. Daher treten in diesem Fall immer stabile Dauerschwingungen auf.

Die Schnittpunkte von LOK und NOK liegen auf der reellen Achse. Folglich gilt für die gesuchten ω_p

$$\operatorname{Im}L(j\omega_p) = \operatorname{Im}\frac{1}{(1+j\omega_p)^4} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{Im}(1+j\omega_p)^4 = 0 \quad .$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(1+j\omega_p)^4 &= 0 \\ \operatorname{Im}(1+4j\omega_p+6(j\omega_p)^2+4(j\omega_p)^3+(j\omega_p)^4) &= 0 \\ 4\omega_p-4\omega_p^3 &= 0 \\ 4\omega(1-\omega^2) &= 0 \\ \rightarrow \omega_p &= 1\end{aligned}$$

Damit kann nun der Schnittpunkt auf der reellen Achse berechnet werden als

$$\operatorname{Re}L(j\omega_p) = \frac{1}{(1+j)^4} = \frac{1}{(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})^4} = \frac{1}{4e^{j\pi}} = -\frac{1}{4} \quad .$$

Um einen Schnittpunkt von LOK und NOK zu erhalten und damit eine stabile Dauerschwingung, muß also die Bedingung $m < 4$ eingehalten werden. Für $m = 4$ ergibt sich eine semi-stabile Schwingung.